§ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі және оның эквивалентті нормалары

Анықтама $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтауын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі деп аталады. Мұнда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ белгілеудегі жоғарыдағы нөлі функцияның финиттігін білдірмейді, $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтаудағы ”нөлдік шекаралық шарттарды” ($u(x)$ $L_2(\Omega)$ -дегі ”орташа”) білдіреді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің меншікті ішкі кеңістігі болады. Анықтамасынан $\Rightarrow$

$\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін $\{\upsilon_k(x)\}$, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар тізбегі табылып,

$$\|\upsilon_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(\upsilon_k - u)}{\partial x_i} \right|^2 + (\upsilon_k - u)^2 \right] dx \to 0,\ k \to \infty.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістіктерінің негізгі қасиеттерін келтірейік.

Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Норма енгізсек, $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалентті норма аламыз.

Ескерту Егер барлық $u(x) \in X$ функциясы үшін C_1, $C_2 > 0$ тұрақтылары табылып,

$$C_1\|u\|_2 \le \|u\|_1 \le C_2\|u\|_2$$

теңсіздігі орындалса, онда X кеңістігінде $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ нормалары эквивалентті деп аталады.

$\{u_k(x)\}$ функциялар тізбегі бір нормада жинақты болса, оның эквивалентті нормасында да жинақталатыны айқын.

§ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі. Фридрихс теңсіздігі.

Анықтама $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтауын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі деп аталады. Мұнда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ белгілеудегі жоғарыдағы нөлі функцияның финиттігін білдірмейді, $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтаудағы "нөлдік шекаралық шарттарды" ($u(x)$ $L_2(\Omega)$ -дегі "орташа") білдіреді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің меншікті ішкі кеңістігі болады. Анықтамасынан $\Rightarrow$

$\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін $\{\upsilon_k(x)\}$, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар тізбегі табылып,

$$\|\upsilon_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(\upsilon_k - u)}{\partial x_i} \right|^2 + (\upsilon_k - u)^2 \right] dx \to 0, \ k \to \infty.$$

Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Норма енгізсек, $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалентті норма аламыз.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктерінің нормаларының эквиваленттігін көрсетуі үшін Фридрихс теңсіздігін дәлелдейміз.

Фридрихс теоремасы Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Онда $C = C(\Omega)$ тұрақтысы табылып, $\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздік орынды:

$$\int_\Omega u^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{1}$$

Немесе

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_1(\Omega) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)},$$

мұнда $C(\Omega)$, $C_1(\Omega)$ тұрақтылары $u(x)$ функциясынын тәуелді емес, ал Ω облысының өлшеміне тәуелді.

Дәлелдеуі (1) теңсіздікті $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясына көрсетсек жеткілікті, себебі оны тұйықтау арқылы $\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін дәлелденеді. Айталық, $u(x)$ фукциясы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігіндегі қандай да бір элементі болсын. Оны $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінен $\{\upsilon_k(x)\}$, $(k = 1,2,\ldots)$ функциялар тізбегіне $W_2^1(\Omega)$ нормасында аппроксимациялаймыз. (1) теңсіздік $\upsilon_k(x)$ функциясы үшін орындалсын:

$$\int_\Omega (\upsilon_k)^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{2}$$

(2) теңсіздіктен $W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы $k \to \infty$ шекке көшсек, оң және сол жағының шектері бар, онда (1) теңсіздік $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін орындалады. Бұл процедура "$W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы тұйықтау" деп аталады.

Айталық, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ болсын. $\upsilon_k(x)$ функцияның тұғыры $\Omega -$ да жатады, онда $\upsilon_k(x)$ функциясын нөлмен жалғастыруға болады және $\Omega -$ ның орнына $\Pi \subset \Omega$ параллелепипед қарастыруға болады.

$$\Pi = \{x : \ 0 < x_i < d_i\}.$$

Айталық, $d_1 -$ қырлардың ең кішісі болсын. $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\upsilon_k(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n)}{\partial y_1} dy_1.$$

Бұл теңдіктің екі жағын квадраттап және Π облыс бойынша интегралдаймыз:

$$\int_\Pi \upsilon_k^2(x) dx = \int_0^{d_1} dx_1 \int_{\Pi'} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 dx',$$

мұнда $\Pi' = \{x: \ (x_2, \ \ldots, \ x_n) \ \ 0 < x_i < d_i, \ \ i = \overline{2,n}\}$.

Оң жақтағы бірөлшемді интегралды Коши-Буняковский теңсіздігінің көмегімен бағалаймыз:

$$\left(\int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(y,x')}{\partial y_1} dy_1\right)^2 \le x_1 \int_0^{d_1} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_1}\right)^2 dy_1.$$

Сондықтан

$$\int_\Pi \upsilon_k^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_{\Pi'} \int_0^{d_1} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_1}\right) dy_1 = \frac{d_1^2}{2} \int_\Pi \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_1}\right)^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_\Pi \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Немесе $\Omega -$ ден тысқары $\upsilon_k(x) \equiv 0$, онда

$$\int_\Omega \upsilon_k^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_1}\right)^2 dx. \qquad (3)$$

Сонымен, $\{\upsilon_k(x)\} \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы $u(x)$ функциясын $W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы аппроксимациялайды. Онда

$\upsilon_k(x) \to u(x), \quad L_2(\Omega) -$ де, $\dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad L_2(\Omega) -$ де (3) шекке көшсек, (1) Фридрихс теңсіздігін аламыз:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{d_1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема дәлелденді.

Орта функциялар және оның қасиеттері. Олардың шексіз дифференциалдануы.

L_p -да орталау операциясын анықтау үшін орталау ядросы ұғымын енгіземіз. Ол үшін келесі қасиеттерге ие теріс емес $\omega(x)$ функциясын қарастырайық:

1). $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$;

3). $\int_{R^n} \omega(x) dx = 1$.

Орталау ядросы деп орталау радиусы $h > 0$

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (1)$$

болатын функцияны атаймыз.

$\omega(x)$ функциясының (1)-(3) қасиеттерінен орталау ядросының қасиеттері шығады:

1). $\omega_h(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega_h(x) \subset \overline{B_h}(x) = \{x \in R^n : |x| \le h\}$;

3). $\int_{R^n} \omega_h(x) dx = 1$.

Бұл қасиет келесі түрде дәлелденеді: $\dfrac{x}{h} = y \ \Rightarrow \ dx = h^n dy.$

$$\frac{1}{h^n} \int_{R^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) dx = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} \omega(y) h^n dy = \int_{R^n} \omega(y) dy = 1.$$

Анықтама. Айталық, $\varphi \in L_p(\Omega), \ 1 \le p < \infty$ болсын. φ функциясын Ω-дан тысқары нөлмен жалғастырамыз. Жалғастырылған функцияны осы белгілеуді қалдырамыз.

$\varphi(x)$ функциясының $\varphi_h(x)$ орталау функциясын деп мына $\omega_h(x)$ орталау ядросымен берілген үйірткіні айтамыз:

$$\varphi_h(x) = \varphi * \omega_h = \int_{R^n} \omega_h(x-y)\varphi(y) dy = \int_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\varphi(y) dy \qquad (2)$$

$B_h(x)$ -радиусы h, центрі x нүктесі болатын шар.

Орта функциялардың $L_p(\Omega)$ кеңістігінде жинақталуы

$L_p(\Omega)$ нормасында $\varphi_h(x)$ орта функциясы $\varphi(x)$ функциясына жинақталады, яғни, $\forall \varphi(x) \in L_p(\Omega),\ \ 1 \le p < \infty$.үшін

$$\| \varphi_h - \varphi \|_{L_p(\Omega)} \to 0, \quad h \to 0\,,\ \forall \varphi \in L_p(\Omega)$$

және $h > 0$ болғанда

$$\| \varphi_h \|_{L_p(\Omega)} \le \| \varphi \|_{L_p(\Omega)} \qquad (3)$$

теңсіздігі орынды.

Алдымен (3) теңсіздікті **дәлелдейік**. $\varphi_h(x)$ орта функциясын келесі түрде жазайық:

$$\varphi_h(x) = \int\limits_{R^n} \omega_h^{\frac{1}{p}}(x-y)\varphi(y)\omega_h^{\frac{1}{q}}(x-y)dy = \left| \begin{array}{l} .\frac{1}{\text{p}} + \frac{1}{\text{q}} = 1, \\ \text{Ãåëüäåð} \\ \text{ò. ê} \end{array} \right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{R^n} \omega_h(x-y)|\varphi(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{R^n} \omega_h(x-y)dy \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y)\,|^p\ dy \right)^{\frac{1}{p}};$$

Алынған теңсіздіктің екі жағында p дәрежеге шығарып, Ω облысында интегралдаймыз. Бұдан

$$\| \varphi_n(x) \|_{L_p(\Omega)}^p \le \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y)\,|^p\ dy \right)^{\frac{p}{p}} dx$$

$\omega_h(x)$ ядросы $B_h(x)$ - тан тысқарыда нөлге тең, ал Ω - ның тысқары $\varphi = 0$. Онда облыстың ішкі интегралында $B_h(x)$ -ты Ω -ға алмастырып және интегралдау ретін өзгертіп, Фубини теоремасын қолдану арқылы келесі теңсіздікті аламыз:

$$\| \varphi_n(x) \|_{L_p(\Omega)}^p \le \int\limits_{\Omega} |\,\varphi(y)\,|^p\ dy \int\limits_{\Omega} \omega_h(x-y)dx = \| \varphi \|_{L_p(\Omega)}^p \quad \Rightarrow \ \| \varphi_n \|_{L_p(\Omega)} \le \| \varphi \|_{L_p(\Omega)}\ .\ \ p = 1$$

болғанда, (3) бағалау Гельдер теңсіздігінсіз алынады.

$L_p(\Omega)$-да $h \to 0$ болғанда $\varphi_h(x)$ орта функцияның $\varphi(x)$ функциясына жинақтылығы $L_p(\Omega)$ кеңістігіндегі орташа үзіліссіздік бойынша дәлелденеді, яғни,

$$\sup_{|z| \le \delta} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \varepsilon(\delta) \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0 \qquad (4)$$

$$\varphi_h(x) - \varphi(x) = \int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)[\varphi(y) - \varphi(x)]dy \le \left| \begin{array}{l} .\,\text{Ãåëüäåð} \\ \text{ò} - \text{ê} \end{array} \right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y) - \varphi(x)\,|^p\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)dy \right)^{\frac{1}{q}} \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\Omega} |\,\varphi(y) - \varphi(x)\,|^p\ dx \le \int\limits_{\Omega} \int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y) - \varphi(x)\,|^p\ dydx = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{|x-y| \le h} \omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y) - \varphi(x)\,|^p\ dy \right) dx \le$$

$$\le \left| \begin{array}{l} y - x = z \\ y = x + z \\ dy = dz \end{array} \right| = \int\limits_{|z| \le h} \omega_h(z) \int\limits_{\Omega} |\,\varphi(x+z) - \varphi(x)\,|^p\ dxdy \le \left(\sup_{|z| \le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \right)^p \int\limits_{|z| \le h} \omega_h(z)dz =$$

$$= \left(\sup_{|z| \le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \right)^p, \quad \Rightarrow$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \sup_{|z| \le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \le \varepsilon(h) \to 0\ ,\ \ h \to 0.$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \to 0 \ , \ \ h \to 0. \ \| u \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{d_i}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L_2(\Omega)}$$

теорема дәлелденді.

Ескерту. Фридрихс теңсіздігі «ақырлы қалыңдықтар» облысында, яғни, бір бағыт бойынша шектелген облыстар үшін орындалады. $O\xi_i$ бағыты Ω облысы проекциясының минималь диаметрі осы облыстың «қалыңдығы» деп аталады.

Шынында, Ω $O\xi -$ ге проекциясы шектелген және қалыңдығы $d -$ ға тең болатын $O\xi$ бағыты бар болады. Онда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\xi, x_i)$$

және

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 d \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 d \| \frac{\partial u}{\partial \xi} \|_{L_2(\Omega)}$$

мұндағы C_2 тек n -ге тәуелді.

Сонымен біз, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ -де Ω шектелген облысы төмендегі норма болған жағдайында көрсеттік, яғни

$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} = \left\{ \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

бұған эквивалент норманы қарастырсақта болады:

$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктері гильберттік болғандықтан, оларды кейде сәйкес $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ түрде жазады.

$L_p(\Omega)$ -дағы функцияларды тегіс функциялармен апроксимациялауды қандай әдіспен алуға болатынын көрсетейік. Бұл мақсаттың астарында «орта функциялар»деп аталатын ұғым жатыр. Олар L_p функцияларын тегістеу әдісін береді.

Орта функциялар және олардың қасиеттері: шексіз дифференциалдану, L_p нормасында жинақтылығы, дифференциалдау және орталау операцияларының алмастыруы.

Орталау ядросы жән оның қасиеттері.

L_p -да функцияларды орталауды (тегістеу) анықтау үшін, орталау ядросы ұғымын енгіземіз. Ол үшін келесі қасиеттерге ие теріс емес $\omega(x)$ функциясын қарастырайық:

1). $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$;

3). $\int\limits_{R^n} \omega(x)dx = 1$.

Мысал ретінде мына функцияны алайық:

$$\omega(x) = \begin{cases} \kappa \exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right\}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Бұл жерде $\kappa = \left\{ \int\limits_{R_n} \exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-1}\right\} dx \right\}^{-1}$. $\omega(x)$ функциясы (1)-формуламен берілген және (1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын функция. (2)-(3) шарттар айқын. $\omega(x)$ функциясы шексіз дифференциалданатынын және $|x| = 1$ сферасында өзінің кез келген ретті туындысын қоса алғанда нөлге айналатынын тексерейік. Шынында,

$$D^\alpha \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} = \frac{\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) \cdot P_\alpha(x)}{(|x|^2-1)^{2|\alpha|}},$$

$P(x)$ -көпмүшелік. Онда мынаны аламыз:

$$\lim_{|x| \to 1} D^\alpha \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} = 0, \quad \forall \alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n.$$

Орталау ядросының орталау радиусы $h > 0$ деп

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (2)$$

$\omega(x)$ функциясының (1)-(3) қасиеттерінен орталау ядросының қасиеттері шығады:

1). $\omega_h(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega_h(x) \subset \overline{B_h}(x) = \{x \in R^n : |x| \le h\}$;

3). $\int\limits_{R^n} \omega_h(x)dx = 1$.

$h > 0$ орталау ядросының радиусы.

3). Бұл қасиет келесі түрле дәлелденеді: $\dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{h} = y. \quad \Rightarrow \quad dx = h^n dy.$

$$\frac{1}{h^n} \int\limits_{R^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right)dx = \frac{1}{h^n} \int\limits_{R^n} \omega(y) h^n dy = \int\limits_{R^n} \omega(y)dy = 1.$$

$n = 1$ болғанда $\omega_h(x)$ функциясының графигі

Анықтама Орта функциялар.

$\varphi \in L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ болсын. φ функциясын Ω -дан тысқары нөлмен жалғастырамыз. Функцияларды жалғастыру үшін бұрынғы белгілеуді қалдырамыз.

$\varphi(x)$ үшін $\omega_h(x)$ орталау ядросы ретінде анықталатын $\varphi_h(x)$ орталау функциясын айтамыз, мына формуламен жазылады:

$$\varphi_h(x) = \varphi * \omega_h = \int\limits_{R^n} \omega_h(x-y)\varphi(y)dy = \int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\varphi(y)dy \qquad (3)$$

$B_h(x)$ -радиусы h, центрі x нүктесі болған шар.

Мысал келтірейік. Айталық, $n = 1$ және үзілісті функцияны қарастырайық:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

Бұл функция үшін (3)-формула бойынша орталауды (тегістеуді) анықтайық.
Тегіс $\varphi_h(x)$ үшін

1). $\varphi_h(x)=0, \quad |x|\geq 1+h$; бұл жағдайда $\sup p\, \varphi_h(x)\cap B_h(x)=\varnothing$

2). $\varphi_h(x)=1, \quad |x|\leq 1-h$; онда $\sup p\, \varphi_h(x)\cap B_h(x)=B_{h-1}(x)$

$\frac{x-y}{h}=z; \quad x-y=hz;$ $\quad$ $x\text{-}y\leq h$, $|x-y|\leq h$;
$x\text{-}h\leq y$, $-x+y\geq h, \quad x-y\leq h$;

алмастыруынан соң:

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\omega_h\left(\frac{x-y}{h}\right)dy=\frac{1}{h}\int_{1}^{-1}\omega_h(z)(hdz)=-\frac{h}{h}\int_{1}^{-1}\omega_h(z)dz=\int_{1}^{-1}\omega_h(z)dz=1$$

Орта функциялардың қасиеттері.

1). Егер $dist(x,\partial\Omega)\geq h$ болса, онда (3)-формуладағы интегралдық функция $B_h(x)$ шардың сыртында нөлге тең, яғни $\varphi_h(x)=0$. Бірақ, егер $\varphi(x)\in C(\overline{\Omega})$ болса, $\varphi(x)=0$ $\partial\Omega$-да, атап айтқанда $\partial\Omega$-да $\varphi_h(x)\neq 0$ болады: $\varphi(x)$ функциясында шекаралық нөлдік мәндері оны орталағанда бекіп қалмайды.

2). R^n кеңістігінде $\varphi_h(x)$ үзіліссіз және кез келген ретті туындысы да үзіліссіз, яғни $\varphi_h(x)\in C^{\infty}(R^n)$.

$\varphi_h(x)$ функциясының үзіліссіздігін дәлелдейік. $x+\Delta x=x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n$, $\forall i=1,...,n$ болсын. Гельдер теңсіздігін және орталау ядросының бірқалыпты үзіліссіздігінен

$$\varphi_h(x+\Delta x)-\varphi_h(x)=\int_{R^n}\left[\omega_h(x+\Delta x-y)-\omega_h(x-y)\right]\varphi(y)dy\leq\left|\begin{array}{l}.\text{Ãåëüäåð}\\ \text{ò}-\text{ê}\end{array}\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_{R^n}\left|\omega_h(x+\Delta x-y)-\omega_h(x-y)\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{R^n}^{\frac{1}{q}}\left|\varphi(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left|\begin{array}{l}\text{îðòàëàó}\\ \text{ÿäðîñûíûí}\\ \text{á³ðêàëûïòû}\\ \text{óç³ë³ññ³çä³ã³íåí}\end{array}\right|\leq\varepsilon C_h\,\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}$$

мұнда $C_h=[mesB_h(x)]^{\frac{1}{q}}$;

Дәл осылайша $\varphi_h(x)$ функциясы үзіліссіз. Туындының үзіліссіздігі осыған ұқсас дәлелденеді және орта функциялардың туындысы (3)-формуладағы орталау ядросын дифференциалдауды есептелінеді.

3). $L_p(\Omega)$ нормасында $h\to 0$ $\varphi_h(x)$ $\varphi(x)$-ке жинақталады, яғни, $\varphi\in L_p(\Omega), \quad 1\leq p<\infty$.

$\|\varphi_h-\varphi\|_{L_p(\Omega)}\to 0, \quad h\to 0$, $\forall\varphi\in L_p(\Omega)$

және $h>0$ болғанда

$$\|\varphi_h\|_{L_p(\Omega)}\leq\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \tag{4}$$

Алдымен (4)-теңсіздікті дәлелдейік. $\varphi_h(x)$ орта функциясын келесі түрде жазайық:

$$\varphi_h(x)=\int_{R^n}\omega_h^{\frac{1}{p}}(x-y)\varphi(y)\omega_h^{\frac{1}{q}}(x-y)dy=\left|\begin{array}{l}.\frac{1}{\text{p}}+\frac{1}{\text{q}}=1,\\ \text{Ãåëüäåð}\\ \text{ò. ê}\end{array}\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)\left|\varphi(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y)\,|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}};$$

Алынған теңсіздіктің екі жағында p дәрежеге шығарып, Ω облысында интегралдаймыз. Бұдан

$$\|\varphi_n(x)\|_{L_p(\Omega)}^p\leq\int_{\Omega}\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y)\,|^p\,dy\right)^{\frac{p}{p}}dx$$

$\omega_h(x)$ ядросы $B_h(x)$ -тан тысқарыда нөлге тең, ал, Ω - ның сыртында $\varphi = 0$. Онда облыстың ішкі интегралында $B_h(x)$ -ты Ω -ға алмастырып және интегралдау ретін өзгертеміз. Фубини теоремасын қолданып, мына формуланы аламыз:

$$\| \varphi_n(x) \|^p_{L_p(\Omega)} \le \int_\Omega | \varphi(y) |^p \; dy \int_\Omega \omega_h(x-y)dx = \| \varphi \|^p_{L_p(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \| \varphi_n \|_{L_p(\Omega)} \le \| \varphi \|_{L_p(\Omega)} \; .$$

$p = 1$ болғанда, (4)-бағалау Гельдер теңсіздігінсіз алынады.

$L_p(\Omega)$ -да $h \to 0$ болғанда $\varphi_h(x)$ -тің $\varphi(x)$ -ке жинақтылығы $L_p(\Omega)$ -дағы орташа үзіліссіздік бойынша дәлелденеді, яғни,

$$\sup_{|z|\le\delta} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \varepsilon(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \tag{5}$$

$$\varphi_h(x) - \varphi(x) = \int_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right]dy \le \left| \begin{matrix} .\text{ Ãåëüäåð} \\ \text{ò}-\text{ê} \end{matrix} \right| \le$$

$$\le \left(\int_{B_h(x)} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \; dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_h(x)} \omega_h(x-y)dy \right)^{\frac{1}{q}} \quad \Rightarrow$$

$$\int_\Omega | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \; dx \le \int_\Omega \int_{B_h(\Omega)} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \; dydx = \int_\Omega \left(\int_{|x-y|\le h} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \; dy \right) dx \le$$

$$\le \left| \begin{matrix} y - z = z \\ y = x + z \\ dy = dz \end{matrix} \right| = \int_{|z|\le h} \omega_h(z) \int_\Omega | \varphi(x+z) - \varphi(x) |^p \; dxdy \le \left(\sup_{|z|\le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \right)^p \quad \Rightarrow$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \sup_{|z|\le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \le \varepsilon(h) \to 0 \;\; , \;\; h \to 0.$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \to 0 \;\; , \;\; h \to 0.$$

4). Келесі теорема орынды.

Теорема (Жалпылама туынды мен орталау операцияларының алмастырымдылығы).

Егер $\varphi(x)$ функциясы $D^\alpha \varphi$ түрде жалпылама туындысы бар болса, онда орта функциядан алынғын туынды орта функцияның жалпылама туындысына тең болады:

$$D^\alpha \varphi_n(x) = [D^\alpha \varphi(x)]_h \, , \quad \alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n \, , \; (7)$$
$$\forall x \in \Omega : \; dist(x, \partial\Omega) > h.$$

Яғни, кез келген $\Omega' \subset \Omega$ ішкі облысында орталау және дифференциалдау операциялары ауыстырымдылы, бұдан (7)-нің сол жағындығы туынды классикалық мағынаға ие болады.

Дәлелдеу.

$$\varphi_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-y)\varphi(y)dy \quad \Rightarrow \quad D^\alpha \varphi_n(x) = \int_\Omega D^\alpha \omega_h(x-y)\varphi(y)dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^\alpha \int_\Omega D^\alpha_y \varphi(y) \omega_h(x-y)dy = [D^\alpha \varphi]_h$$

Ω -да $dist(x, \partial\Omega) > h$ үшін, $\omega_h(x-y)$ функциясы туындыларымен қоса финиттік, $\partial\Omega$ -да интегралдар жоқ болады. Теорема дәлелденді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ және $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі функцияларының шекаралық қасиеттері. Бөліктеп интегралдау формуласы.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ және $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктерін енгіземіз. Әдетте, бұл кеңістіктерде екінші ретті эллиптикалық теңдеулер,дербес жағдайда Лаплас, Пуассон теңдеулері үшін шекаралық есептер шығарылады.

Бұл жерде жалпылама шешімді қандай мағынада түсінуіміз керек? Басқаша айтқанда, $u(x) \in W_2^1(x)$ $n-1$ өлшемді кеңістік элементтерінің ізін анықтауымыз қажет. Алдымен, R^n гипержазықтығында шекаралық көпбейнелік болатын, одан соң R^n кеңістігінде $n-1$ өлшемді тегіс көпбейнелік туындысы болатын жағдайларды қарастырайық.

Теорема 1 Ω кеңістігі $R_+^n = \{x \in R^n : x^{'} = (x_1,...,x_{n-1}) \in R^{n-1},\ x_n > 0\}$ ішкі кеңістігі болсын.

Онда кез келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы келесі қасиеттерге ие:

$u(x)$ функциясы барлық дерлік R_+^n кеңістігінде $x^{'} = (x_1,...,x_{n-1})$ бойынша $u^{'}(x) \in L_2(R^{n-1})$ квадратында интегралданатын $u^{'}(x_1,...,x_n)$ функциясымен беттеседі. Барлық $x_n > 0$ үшін, келесі бағалау орынды:

$$\int_{-\infty}^{\infty} | u^{'}(x_1,...,x_{n-1},x_n)|^2 dx_1,...,dx_{n-1} \le x_n \iint_{R_+^n} \left|\frac{\partial u^{'}}{\partial x_n}\right| dx_1,...,dx_n \le x_n \| u^{'} \|_{W_2^1(R_+^2)}^2 =$$

$$= x_n \iint_{R_+^n} \left[u^{'2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x_n}\right)^2 \right] dx. \quad (1)$$

яғни,

$$\| u^{'}(x^{'},x_n) \|_{L_2(R_{x^{'}}^{n-1})} \le \sqrt{x_n}\ \| u^{'} \|_{W_2^1(R_+^2)} .$$

Ескерту 1 $u(x)$, $u^{'}(x)$ – функцияларының айырмашылығы, нөл өлшемді жиында $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (және $W_2^1(\Omega)$) кеңістігінің элементтері ретінде беттеседі. Мұндай функциялар эквивалентті деп аталады.

Бұдан ары оларды $u(x)$ арқылы белгілейміз.

Ескерту2.(1)-формуладан:

$$\int_{R_{x^{'}}^{n-1}} | u^{'}(x^{'},x_n)|^2\ dx^{'} \to 0\ \ x_n \to 0 \quad (2)$$

яғни, $x_n \to 0$ жағдайда $u^{'}(x^{'},x_n)$ функциясы орта квадратта нөлге ұмтылады.

(1)-теоремадан кез келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы $L_2(\Gamma)$ элементі ретінде, $\Gamma = \{x_n = const\}$ гипер жазықтығында ізі бар болады. Бұл функцияның ізі $L_2(\Gamma)$ кеңістігі нормасында $x_n \in [0,\delta]$ үздіксіз тәуелді

$$\sup_{x_n \in [0,\delta]} \| u^{'}(x^{'},x_n) \|_{L_2(\Gamma)} \to 0\ \ x_n \to 0 .$$

Теорема 1 Қарапайым түрде $n = 2$ болған жағдайын қарастырайық. Айталық, $v(x_1,x_2) \in C_0$ болсын, онда Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

$$v(x_1,x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\partial v(y_1,y)}{\partial y} dy = \int_0^{x_2} \frac{\partial v(x_1,y)}{\partial y} dy$$

$\forall x_2 > 0$, Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ

$$|v(x_1,x_2)|^2 \le \int_0^{x_2} 1^2 dy \cdot \int_0^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy = x_2 \int_0^{x_2} \left|\frac{\partial v(x_1,y)}{\partial y}\right|^2 dy.$$

Екі жағында x_1 бойынша интегралдасақ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1,x_2)|^2 dx_1 \le x_2 \iint_{R^2} \left| \frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2 dx_1 \le x_2 \parallel v \parallel^2_{W_2^1(R_+^2)}, \ \forall x_2 > 0. \tag{3}$$

$u(x_1,x_2) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болсын және $W_2^1(R_+^2)$ нормасында $v_n(x_1,x_2) \to u(x_1,x_2)$ жинақталатын $v_n(x_1,x_2) \in C_0^\infty(R_+^2)$ тізбегі бар болады. (3)-формулаға $v = v_m - v_n$ қойып, мынаны аламыз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v_m(x_1,x_2) - v_n(x_1,x_2)|^2 dx_1 \le x_2 \parallel v_m - v_n \parallel^2_{W_2^1(R_+^2)} \to 0, \quad m,n \to \infty, \ \forall x_2 > 0. \tag{4}$$

Демек, $L_2(-\infty < x_1 < +\infty)$ кеңістігінде кез келген бекітілген $x_2 > 0$ үшін, $v_n(x_1,x_2)$ функциясы фундаменталь тізбек құрайды. L_2-нің толықтығынан $u^{'}(x_1,x_2) \in L_2(-\infty < x_1 < +\infty)$ функциясы табылады, мына шартты қанағаттандыратын:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{'}(x_1,x_2) - v_n(x_1,x_2)|^2 dx_1 \to 0, \quad n \to \infty, \ \forall x_2 > 0.$$

$u^{'}(x_1,x_2)$ функциясы барлық дерлік R_+^2-те $u(x_1,x_2)$ функциясымен беттесетінін дәлелдейік. (4)-формуладан $m \to \infty$ шекке көшеміз. $W_2^1(R_+^2)$ кеңістікте $\{v_m\} \to u(x)$ болады, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{'}(x_1,x_2) - v_n(x_1,x_2)|^2 dx_1 \le x_2 \parallel u - v_n \parallel^2_{W_2^1(R_+^2)} . \tag{5}$$

(5)-ті x_2 бойынша 0-ден A-ға дейін интегралдаймыз, мұнда $\forall A: \ 0 < A < \infty$

$$\int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{'}(x_1,x_2) - v_n(x_1,x_2)|^2 dx_1 \right) dx_2 \le \frac{A^2}{2} \parallel u - v_n \parallel^2_{W_2^1(R_+^2)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

$W_2^1(R_+^2)$ нормасында $\{v_n\} \to u$ $n \to \infty$ болса, онда $L_2(R_+^2)$ кеңістікте $v_n(x_1,x_2)$ тізбек $u(x_1,x_2)$-ке жинақталады, демек, $L_2(-\infty < x_1 < +\infty, \ 0 < x_2 < A)$ де жинақталады. Бұл жерден және (6)-формуладан, барлық дерлік $(-\infty < x_1 < +\infty, \ 0 < x_2 < A)$ жолағында $u^{'}(x_1,x_2) = u(x_1,x_2)$ келіп шығады, демек, бұл R_+^2 үшін де орындалады. Бұдан, $u(x_1,x_2)$ функциясы $u^{'}(x_1,x_2) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясымен осы кеңістіктің элементі ретінде беттеседі. (3)-теңміздікте $v(x)$ функциясының орнына $v_n(x)$ қоямыз,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v_n(x_1,x_2)|^2 dx_1 \le x_2 \iint_{R^2} \left| \frac{\partial v_n(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2 dx_1$$

егер $n \to \infty$ болғанда шекке көшсек (1)-теңсіздікті аламыз.

Енді, шекарасы $\partial\Omega$ C^1 регуляр классында(яғни, C^1 кеңістігінде жататын, шекарада локаль координата беретін функция) шектелген $\Omega \subset R^n$ облысын қарастырайық.

Мынадай функциялар берілсін:

$$x = \varphi(y) \quad \left. \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1,y_2) \\ x_2 = \varphi_2(y_1,y_2) \end{cases} \right\} \ \varphi_i \in C^1(\overline{\Omega_1});$$

$$y = \psi(x) \quad \left. \begin{cases} x_1 = \psi_1(x_1,x_2) \\ x_2 = \psi_2(x_1,x_2) \end{cases} \right\} \ \psi_i \in C^1(\overline{\Omega})$$

$y_2 > 0$ жарты жазықтығы және $a \le y_1 \le t$ кесіндісі бойында Oy_1 осімен жанаса орналасқан, Ω-ны $\Omega_1 \subset R^2(y_1,y_2)$ облысына өзара бірмәнді үздіксіз бейнелеуді жүзеге асыру қажет. $A = \varphi(a,0), \ B = \varphi(b,0)$ болсын, $y = \psi(x)$ бейнелеуі болған жағдайда $\breve{AB} \subset \partial\Omega$ шекара бөлігі $[a,b] \subset \partial\Omega_1$ кесіндісіне көшеді.

Ω-дан тысқары нөлмен жалғастыруға болатын $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясын қарастырайық. Жалғастыратын функцияны тағы $v(x)$ арқылы белгілейміз. $v(x) \in C_0^\infty(R^2)$ болатыны айқын.

Сол сияқты Ω-дан тысқары нөлмен жалғастыруға болатын $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясын қарастырайық. Бұл жалғастыруды да $u(x)$ арқылы белгілейміз. Бұдан мынаны аламыз: егер $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $n\to\infty$ болғанда $v_n(x)\to u(x)$ болса, онда $\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)$-де жалжалғастырудан соң $v_n(x)\to u$ болдаы. $\Gamma_\varepsilon=(\breve{A}_\varepsilon, B_\varepsilon)$ арқылы $y=\psi(x):\ \Omega\to\Omega_1$ бейнелеуі, Ω-да $\{y_2=\varepsilon\}\cap\Omega_1$ кесіндісінің түпбейнесін белгілейміз. Бұл жерден:

Теорема 2 1) $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$;

2) Якоби матрицасының элементтерін

$$\frac{D[\varphi(y_1,y_2)]}{D(y_1,y_2)}\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{pmatrix}$$

$\overline{\Omega}_1$-де үзіліссіз және барлық $\overline{\Omega}_1$-де, бұл матрицаның анықтауышы нөлге тең емес, яғни, $\psi:\ x\to\varepsilon$ түрлендіруі өзгешеленбеген. Онда барлық дерлік Ω-да $u(x)$ функциясы $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ кеңістігіне тиісті болған, $\forall\varepsilon:\ 0<\varepsilon<\varepsilon_1$, сондай $u^{'}(x)$ функциясымен беттеседі. Бұл жерде

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}|u^{'}(x_1,x_2)|^2\, d\Gamma_\varepsilon\to 0,\quad \varepsilon\to 0 \tag{6}$$

Егер(6)-формула орындалса, онда $u^{'}(x)$ орта функциясы $A\breve{B}$ доғасында нөлге айналады.

Дәлелдеу. $u(x)\in W_0^{1,2}(\Omega)=H_0^1(\Omega)$ және $v_n(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ мен $v_n(x)\in C_0^\infty(\overline{\Omega}_1)$ болсын, $\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)$-да $v_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$, одан соң оны Ω -дан тысқары нөлмен жалғастырамыз және мынаны аламыз:

$$\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)\text{-де } v_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$$
$$\tilde{v}_n(y_1,y_2)=v_n(\varphi_1(y_1,y_2)),\ \ \varphi_2(y_1,y_2),$$
$$\tilde{u}(y_1,y_2)=u(\varphi_1(y_1,y_2)),\ \ \varphi_2(y_1,y_2),$$

Онда үзіліссіз бейнелеуден $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$-де:

$$\tilde{v}_n(y_1y_2)\to\tilde{u}(y_1y_2)$$

Шынында да, егер тізбек $L_2(\Omega)$-де $v_n(x)\to u(x)$ болса, онда $L_2(\Omega_1)$-де

$$\tilde{v}_n(y)\to\tilde{u}(y)$$

$$\int_{\Omega_1}\left|\tilde{v}_n(y)-\tilde{u}(y)\right|^2 dy_1dy_2=\int_\Omega\left|v_n(x)-u(x)\right|\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx_1dx_2\le C\int_\Omega\left|v_n(x)-u(x)\right|^2 dx_1dy_2\to 0$$

$n\to 0$ болған жағдайда.

Дәл сол сияқты талқылауды туындылар үшін келтірейік:

Егер $L_2(\Omega_1)$-де $\frac{\partial v_n^{(x)}}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i}$, онда $L_2(\Omega_1)-$ де $\frac{\partial\tilde{v}_n(y)}{\partial y_i}\to\frac{\partial\tilde{u}(y)}{\partial y_i}$ i=1, 2,...

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial y_i}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_i}\right|^2 dy_1dy_2=\int_\Omega\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}+\frac{\partial v_n\partial\varphi_2}{\partial x_2\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}\right|^2\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx_1dx_2\le$$

$$\le C\int_\Omega\left\{\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}\right|^2+\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}^2\right|\right\}dx_1dx_2\le$$

$$\leq C_1 \int_\Omega \left\{ \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right\} dx_1 dx_2 \to 0,\ n \to \infty.$$

R_+^2 жарты жазықтығында $\tilde{v}_n(y)$ және $\tilde{u}(y)$ функцияларын Ω_1 тысқары нөлмен жалғастырамыз. Онда теорема 1 бойынша $\tilde{u}(y)$ функциясы $\tilde{u}'(y)$ функциясымен барлық дерлік R_+^2-те беттеседі,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{u}'(y_1 y_2) \right|^2 dy_1 \leq y_2 \iint_{R_+^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}'(y)}{\partial y_2} \right|^2 dy_1 dy_2 \leq y_2 \parallel \tilde{u}' \parallel^2_{W_2^1(R_+^2)}, \quad \forall y_2 > 0.$$

Сондықтан $\int_{-\infty}^{\infty} | \tilde{u}'(y) |^2\ dy_1 = \int_{\grave{a}_{\acute{A}}}^{\hat{a}_{\acute{E}}} | \tilde{u}'(y_1 y_2) |\, dy_1 \to 0 \quad y_2 \to 0$

$u'(x_1 x_2) = \tilde{u}'(\psi_1(x_1 x_2),\ \psi_2(x_1 x_2))$ арқылы белгілейміз. $u'(x_1 x_2)$ функциясы $u(x_1 x_2)$ функциясымен беттесетіні айқын, сонымен

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} | u'(x_1 x_2) |\, d\Gamma_\varepsilon = \int_{\grave{a}_\varepsilon}^{\hat{a}_\varepsilon} | \tilde{u}'(y_1 y_2) |^2 \left| \frac{d\Gamma_\varepsilon}{dy_1} \right| dy_1 \leq C \int_{\grave{a}_\varepsilon}^{\hat{a}_\varepsilon} | \tilde{u}'(y_1 y_2) |^2\ dy_1 \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{7}$$

Сонымен біз $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ орта функциясын $\partial\Omega$ нөлге айналдыратынын дәлелдедік, яғни

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} | u'(x_1 x_2) |\, d\Gamma_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

$\partial\Omega$ шекарасының бөлігін $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \breve{A}_k B_k$ түрде алуға болады. n- өлшемді жағдай үшін де осы келтірілген дәлелдеу орынды. $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі үшін келесі теорема орынды:

Теорема 3 $\partial\Omega$ бөлікті-тегіс кеңістік, онда $L_2(\partial\Omega)$-ның элеметтері ретінде $\partial\Omega$-да $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ элементтері үшін іздер анықталады.

Теорема 3 Соболев кеңістігіндегі енгізу теоремаларының қарапайымдарының бірі және оны келесі түрде өрнектеуге болады:

Егер $\partial\Omega$-бөлікті-тегіс шекара, онда $L_2(\partial\Omega)$-да $W_2^1(\Omega)$ шектеледі, онда мына бағалауды аламыз:

$$\parallel u \parallel_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \parallel u \parallel_{W_2^1(\Omega)}. \tag{8}$$

Теорема 2 бойынша ($\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде қарастыратын болсақ), Ω облысының $\partial\Omega$ шекарасында тегістік шартын алмасақта болатынын байқаймыз. Бұл деген кез келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясын Ω-дан тысқары, $\overset{0}{W}{}_2^1(B)$ элементі ретінде нөлмен жалғастыруға болады. Мұнда $B\ \overline{\Omega}$-мен тұйықтауы.

Соболев енгізу теоремасының мәнісі кеңістіктерді арнаулы ретпен құрудан тұрады, яғни бір кеңістік бүтіндей басқа кеңістікке еніп кететіндей етеді, бұл енгізу әртүрлі кеңістіктердің элементтерін қарастырғанда біреуінің не сол функцияның өзінің нормаларының арасындағы теңсіздіктермен алып жүреді.

Бөліктеп интегралдау формуласы. 2-3-теоремалардан, $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ элементтері үшін мына бөліктеп интегралдау формуласы орынды:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v(x) dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv \cos(\vec{n}\, x_i) ds \tag{9}$$

$\vec{n}$ - сыртқы бірлік нормал $\partial\Omega$-да, Ω-ға қатысты. (9)-формула $u(x), v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялары және $\partial\Omega$ тегіс беттері үшін анализден белгілі. 3 теоремадан $W_2^1(\Omega)$ элементтерінің ізі қасиетінен, $\forall i = 1,2,...,n$ болғанда $u(x), v(x) \in W_2^1(\Omega)$ функциялары үшін, егер $\partial\Omega$-тегіс бет болса, (9)-формула сақталады. Бұны тексеру үшін, $\{u_n\}, \{v_n\}$ тегіс элементтерімен $u(x)$ және $v(x)$ аппроксимациялау қажет, (9)-формуланы жазамыз. Бұдан соң шекке көшеміз.

(2)-теореманың көмегімен $u(x), v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ элементтері үшін (9)-формула қарапайым түрге келеді:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall i = \overline{1, n}. \tag{10}$$